Hoja de problemas 2

20/09/2022

Curvas algebraicas

1. Sea $p(T) = T^2$ y $q(T) = T^2$ y definimos

$$f(X,Y) = \mathrm{res}_T(p(T) - X, q(T) - Y) \in k[X,Y].$$

   (a) Calcular $f \in k[X,Y]$.

   (b) ¿Si $k = \mathbb{R}$, es verdad que $V(f) = \left\{(p(t), q(t)) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$?

   (c) ¿Si $k = \mathbb{C}$, es verdad que $V(f) = \left\{(p(t), q(t)) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, t \in \mathbb{C}\right\}$?

2. Sea $p, q \in k[X,Y]$,

$$p(X,Y) = X^2Y - 3XY^2 + X^2 - 3XY, \qquad p(X,Y) = YX^3 - 4Y^2 - 3Y + X^3 + 1.$$

   (a) Demonstrar $\mathrm{res}_X(p,q) \neq 0$.

   (b) Demonstrar $\mathrm{res}_Y(p,q) = 0$.

   (c) ¿Cuáles son los factores comunes de p y q?

3. Sea $\lambda > 0$ un número real "bastante grande", y

$$f(X,Y) = Y - \lambda(X^3 - X), \qquad g(X,Y) = X - \lambda(Y^3 - Y).$$

   Demonstrar que todos los puntos de intersección entre $V(f)$ y $V(g)$ son *reales*. Es decir, si $x, y \in \mathbb{C}$ tal que $(x,y) \in V(f) \cap V(g)$, entonces $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Demonstrar: no hay polinomio $f(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$ tal que

$$V(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = \sin(x)\right\}.$$