Hoja de problemas 3

27/09/2022

Curvas algebraicas

Suponemos que k es un cuerpo algebraicamente cerrado.

1. Sea $F \in k[X, Y, Z]$ homogéneo de grado 2,

   $$F = u_{0,0}X_0^2 + u_{0,1}X_0X_1 + u_{0,2}X_0X_2 + u_{1,1}X_1^2 + u_{1,2}X_1X_2 + u_{2,2}X_2^2,$$

   donde los $u_{i,j} \in k$, no todos cero. Demonstrar: F es una ecuación minimal si y solo si la matriz

   $$\begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1}/2 & u_{0,2}/2 \\ u_{0,1}/2 & u_{1,1} & u_{1,2}/2 \\ u_{0,2}/2 & u_{1,2}/2 & u_{2,2} \end{pmatrix}$$

   tiene rango > 1.

2. ¿Cuáles son los componentes de los siguentes curvas?

   $$C = V(X^2Z^3 + YZ^4 + XYZ^3 + Y^3Z^2 + 2XY^3Z + Y^3X^2 + Y^4X)$$
   $$D = V(X^4 + Y^4)$$
   $$E = V(X^3 + 3X^2Y + X^2Z + 3XY^2 + 2XYZ + Y^3 + Y^2Z)$$

3. Encontrar una cónica que pasa por todos los puntos

   $$P_1 = [0 : 0 : 1],\ P_2 = [1 : 0 : 1],\ P_3 = [0 : 1 : 1],$$
   $$P_4 = [1 : 1 : 1],\ P_5 = [1 : 3 : 2].$$

4. Sea $f, g \in k[X_1, \dots, X_a, Y_1, \dots, Y_b, Z]$,

   $$f = \prod_{i=1}^{a}(Z - X_i), \quad g = \prod_{j=1}^{b}(Z - Y_j),$$

   y

   $$r = \mathrm{res}_Z(f, g) \in k[X_1, \dots, X_a, Y_1, \dots, Y_b].$$

   Si $x = (x_1, \dots, x_a) \in k^a$ y $(y_1, \dots, y_b) \in k^b$, definimos $f_x, g_y \in k[Z]$,

   $$f_x(Z) = f(x_1, \dots, x_a, Z), \quad g_y(Z) = g(y_1, \dots, y_b, Z).$$

   (a) Demonstrar: $r(x, y) = \mathrm{res}(f_x, f_y)$.

   (b) Demonstrar: si hay i y j tal que $x_i = y_j$, entonces $r(x, y) = 0$.

   (c) Concluir, usando el appéndice:

   $$r(X, Y) = \prod_{\substack{i=1,\dots,a \\ j=1,\dots,b}} (Y_i - X_j).$$

   (Indicación: cuál es el monomio en grado máximo en los X_i? Cuál es su coeficiente?)

Appéndice

La siguente teorema sigue del Nullstellensatz de Hilbert:

Teorema 1. *Suponemos que k es algebramente cerrado. Si $p, q \in k[X_1, \dots, X_n]$, entonces $p|q$ si y solo si para cada $(x_1, \dots, x_n) \in k^n$,*

$$p(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad q(x_1, \dots, x_n) = 0.$$