Hoja de problemas 4

06/10/2022

Curvas algebraicas

1. Suponemos que k es algebramente cerrado. Sea

$$f(X,Y) = X(X-1)Y - 1 \in k[X,Y],$$

y $F(X,Y,Z) \in k[X,Y,Z]$ su homogeneizado, definiendo curva afín $V(f) \subset \mathbb{A}^2$ y curva proyectiva $V(F) \subset \mathbb{P}^2$.

   (a) Demonstrar si $p, q \in k[T]$ son polinomios tal que $f(p(T), q(T)) \equiv 0$, entonces p, q son constantes.

   (b) Encontrar polinomios homogéneos del mismo grado positivo $P, Q, R \in k[U,V]$ tal que para todos $[u:v] \in \mathbb{P}^2$, los $P(u,v), Q(u,v), R(u,v)$ no son todos cero, y

$$V(F) = \left\{ [P(u,v) : Q(u,v) : R(u,v)] \in \mathbb{P}^2 \,\middle|\, [u:v] \in \mathbb{P}^1 \right\}.$$

2. Sea

$$C = \left\{ \left(\frac{2t}{t-3}, \frac{-t}{t-4} \right) \,\middle|\, t \in k,\ t \neq 3, 4 \right\}$$

   (a) Falta un punto en C para que sea una curva affín. ¿Qué punto?

   (b) Identificamos C con su imagen in $\mathbb{P}^2$ via la inyección canónica $\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$, $(x,y) \mapsto [x:y:1]$. Falta tres puntos en C para que sea una curva proyectiva. ¿Qué puntos?

3. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\gcd(a,c) = 1$ y $a + b = c$, y definimos

$$C = V(X^a Y^b - Z^c) \subset \mathbb{P}^2.$$

Encontrar polinomios homogéneos $A, B, C \in k[T,S]$, del mismo grado, tal que la función $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, $[t:s] \mapsto [A(t,s) : B(t,s) : C(t,s)]$ es inyectiva, y tiene imagen C.

4. Suponemos que $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Sea

$$A_0(T_0,T_1) = T_0^2 + T_1^2, \quad A_1(T_0,T_1) = T_0^2 - T_1^2, \quad A_2(T_0,T_1) = T_0 T_1.$$

Encontrar un $F \in k[X_0, X_1, X_2]$, homogéneo de grado 2, tal que

$$V(F) = \left\{ [A_0(t_0,t_1) : A_1(t_0,t_1) : A_2(t_0,t_1)] \in \mathbb{P}^2 \,\middle|\, [t_0 : t_1] \in \mathbb{P}^1 \right\}.$$