Hoja de problemas 5

11/10/2022

Curvas algebraicas

1. Suponemos que $L \subset \mathbb{P}^2$ es una recta, y que tenemos dos parametizaciones de L, i.e. funciones lineales $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2 \in k[U, V]$ que defienen funciones

$$\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2, \quad [u : v] \mapsto [A_0(u, v) : A_1(u, v) : A_2(u, v)],$$
$$\chi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2, \quad [u : v] \mapsto [B_0(u, v) : B_1(u, v) : B_2(u, v)],$$

tal que $\phi(\mathbb{P}^1) = \chi(\mathbb{P}^1) = L$. Demonstrar que hay $a, b, c, d \in k$ tal que $ad - bc \neq 0$ y

$$\chi(U, V) = \phi(aU + bV, cU + dV).$$

2. Sea $\lambda, \mu \in k$, no ambos cero, y

$$L = V(\lambda X + \mu Y), \quad C = V((X^2 Z + Y^3)(X^3 + Y^2 Z))$$

Calcular $\mathrm{mult}_p(L, C)$ (dependiendo de λ, μ).

3. Sea k de característica $\neq 2, 3$, y definimos curvas afines

$$E_b = V(X^3 - X + b - Y^2) \subset \mathbb{A}^2,$$

una para cada $b \in k$. Para qué b tiene E_b punto singular?

4. Sea $C_1, C_2 \subset \mathbb{A}^2$ dos curvas afínes que no comparten componante, y $p \in C_1 \cap C_2$. Demonstrar que p es un punto singular en la curva $C = C_1 \cup C_2$.