

Hoja de problemas 6

18/10/2022

Curvas algebraicas

1. Sea $P \in k[X]$ y $C = V(Y - P(X)) \subset \mathbb{A}^2$ su gráfica.
 - (a) Demostrar que C es una curva lisa.
 - (b) Si $p = (a, b) \in C$, describir el tangente $\mathbb{T}_p C$
 - (c) Cuáles son los puntos de inflexión de C ? ¿Son puntos de inflexión ordinarios?

2. Sea
$$f(X, Y) = 1 + X^4 + X^3Y^2 - XY^4 + Y^4 \in k[X, Y].$$
 - (a) ¿Cuáles son los puntos del infinito de la curva C ?
 - (b) ¿Cuáles son las asíntotas de C ?
 - (c) En qué dirección tiene C una rama parabólica?

3. Sea $d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ y
$$C_d = V(X^d + Y^d + Z^d).$$
 - (a) Demostrar que C_d es lisa.
 - (b) ¿Cuáles son los puntos de inflexión de C_d ?

4. Para cualquier $d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, encontrar un número $f(d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que: si $C \in \mathbb{P}^2$ es una curva proyectiva de grado d , y $|\text{Flex}(C)| < \infty$, entonces $|\text{Flex}(C)| \leq f(d)$.