Hoja de problemas 8

01/11/2022

Curvas algebraicas

1. Sea $f, g \in k[X, Y]$,

$$f(X,Y) = (X^2 - Y^3)(X^3 - Y^2), \qquad g(X,Y) = X^5 - X^2Y^2 + Y^5.$$

   y $C = V(f)$, $D = V(g)$.

   (a) Dibujar los polígonos de Newton de f y g.

   (b) Encontrar dos parametrizaciones de C en la forma $(X, p_1(X))$ y $(X, p_2(X))$ con $p_1, p_2 \in k\{\{X\}\}$ y $O(p_1) \neq O(p_2)$. Hay otras parametrizaciones equivalentes a éstas?

   (c) Siguiendo la demonstración de teorema 6.18, demonstrar que D tiene parametrizaciones de la forma $(X, q_1(X))$ y $(X, q_2(X))$, con $q_1, q_2 \in k\{\{X\}\}$, tal que para $i = 1, 2$, los series $p_i(X)$ y $q_i(X)$ empiezan con el mismo monomio.

2. Sea $f(X,Y) = X^a + Y^b$ y $g(X,Y) = X^c + Y^d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $ad - bc > 0$.

   (a) Dibujar los polígonos de Newton $\Gamma(f)$ de f y $\Gamma(g)$ de g.

   (b) Demonstrar que el polígono de Newton $\Gamma(fg)$ del producto fg tiene vertices $(a + c, 0)$, (c, b) y $(0, b + d)$.

   (c) Cuáles serían los vertices de $\Gamma(fg)$ si $ad - bc < 0$, o si $ad - bc = 0$?

3. Sea $f \in k[X, Y]$ y $C = V(f)$, y suponemos que $(0, 0) \in C$, y que $(p(T), q(T))$ es una parametrización formal de C en $(0, 0)$. Si

$$p(T) = a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots, \qquad q(T) = b_0 + b_1T + b_2T^2 + \cdots,$$

   y $s = \min\{O(p), O(q)\}$, demonstrar que la recta L que pasa por $(0, 0)$ y (a_s, b_s) es un tangente de C en $(0, 0)$.

4. Sean C, $(p(T), q(T))$ y L como en problema 3. Suponemos que $(p'(T), q'(T))$ es otra parametrización de C en $(0, 0)$, definiendo una recta tangente L'. Demonstrar si $(p(T), q(T))$ son equivalentes, entonces $L = L'$.