Hoja de problemas 9

08/11/2022

Curvas algebraicas

1. Calcular las multiplicidades de intersección $\mathrm{mult}(R, C)$, donde R es la rama parametrizada por (p, q), con $p, q \in k[[T]]$, y $C = V(f)$, en los casos siguentes:

   (a) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, y
   $$f(X,Y) = X^3 + Y^2, \quad p(T) = T^2, \quad q(T) = T^3 + T^k.$$

   (b) $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, y
   $$f(X,Y) = X^a + Y^b, \quad p(T) = T^d, \quad q(T) = T^c.$$

   (c)
   $$f(X,Y) = Y^4 - 2X^3Y^2 + X^5Y^2 + X^6, \quad p(T) = T^2, \quad q(T) = T^3.$$

2. Suponemos que $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ con $a > b$ y $\gcd(a, b) = 1$. Demonstrar que la curva $C = V(X^a - Y^b)$ tiene una única rama en $(0, 0)$.

3. Sea $C \subset \mathbb{A}^2$ una curva algebraica, con ecuación minimal $f \in k[x, y]$, y suponemos que $0 \in C$. Dado el polígono de Newton $\Gamma = \Gamma(f)$, calcular la multiplicidad $\mathrm{mult}_{(0,0)}(C)$ de C en $(0, 0)$.

4. Un anillo *local* es un anillo que tiene un único ideal maximal. Demonstrar que los anillos $k[[T]]$ y $k\{\{T\}\}$ son locales. ¿Cuáles son sus ideas maximales?