Hoja de problemas 10

16/11/2022
Curvas algebraicas

1. Sea $C = V(f) \subset \mathbb{A}^2$ y $\phi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, $\phi(X,Y) = (aX - bY, bX + aY)$, donde $a, b \in k$, tal que $a^2 + b^2 = 1$. Suponemos que C tiene una única rama en $(0,0)$, y que $r = \mathrm{mult}_{0,0}(C) \in \mathbb{Z}_{>0}$.

   (a) Demonstrar que $\phi(C) \subset \mathbb{A}^2$ es una curva afín.

   (b) ¿Cuál es la recta tangente de C y de $\phi(C)$ en $(0,0)$?

   (c) Calcular $\mathrm{mult}_{(0,0)}(C, \phi(C))$.

2. Sea $F(X,Y,Z) = X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2$ y $C = V(F) \subset \mathbb{P}^2$.

   (a) ¿Cuáles son los puntos singulares de C?

   (b) Demonstrar que cada punto singular de C tiene dos ramas lisas.

3. La *curva dual* de una curva en $\mathbb{P}^2$ es el conjunto de puntos $(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{P}^2$ tal que la recta $V(u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2)$ es una recta tangente de un punto de la curva.

   (a) Encontrar una parametrización de la curva $C = V(X^2Z + Y^3)$.

   (b) Demonstrar que la curva dual de C es una curva parametrizada, es decir, hay polinomios homogéneos $A, B, C \in k[U,V]$ del mismo grado tal que la curva dual es el conjunto

   $$\left\{[A(u,v) : B(u,v) : C(u,v)] \in \mathbb{P}^2 \,\middle|\, [u : v] \in \mathbb{P}^2\right\}.$$

4. El *semigrupo* $S_R \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de una rama R es el conjunto de múltiplicidades de intersección de R y cualquier otra curva D,

   $$S_R = \{\mathrm{mult}(R,D) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid D \text{ otra curva}\}.$$

   Por definición, S_R *no* contiene el elemento $+\infty = \mathrm{mult}(R,R)$.

   (a) Demonstrar que S_R es un subsemigrupo de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, es decir, si $a, b \in S_R$, entonces $a + b \in S_R$.

   (b) Demonstrar que si $a, b \in S_R$, entonces $\min\{a, b\} \in S_R$.