Hoja de problemas 12

29/11/2022

Curvas algebraicas

1. Sea $C \in \mathbb{P}^2$ una curva poyectiva con ecuación minimal $F \in k[X_0, X_1, X_2]$. Demonstrar:

   (a) Los parciales $F_i = \partial_i F$ no son todos cero.

   (b) Si F es irreducible, entonces C tiene un número finito de singularidades.

   (c) C tiene un número finito de singularidades.

2. Sea $F(X, Y, Z) = X^2 Z - Y^3$. Entonces, la curva $C = \subset \mathbb{P}^2$ es parametrizada

   $$C = \left\{ [A_0(u, v) : A_1(u, v) : A_2(u, v)] \in \mathbb{P}^2 \,\middle|\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \right\}$$

   con $A_0(u, v) = u^3$, $A_1(u, v) = u^2 v$ y $A_2(u, v) = v^3$, y su curva dual D es parametrizada

   $$D = \left\{ [B_0(u, v) : B_1(u, v) : B_2(u, v)] \in \mathbb{P}^2 \,\middle|\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \right\}$$

   donde $B_0(u, v) = 2v^3$, $B_1(u, v) = -3uv^2$, $B_2(u, v) = u^3$.

   (a) Cuáles son los puntos singulares de C y D, y cuáles son sus parámetros?

   (b) Cuáles son los puntos de inflexión de C y D, y cuáles son sus parámetros?

3. (a) Encontrar la ecuación $f \in k[X, Y]$ de una curva affín $C \in \mathbb{A}^2$, que tiene parametrización formal $Y = X^{3/2} + X^{10/6}$ en $(0, 0)$ (y que tiene una única rama en $(0, 0)$). Cuál es el poliedro de Newton $\Gamma(f)$ de f?

   (b) Encontrar la ecuación $g \in k[X, Y]$ de una curva affín con tres ramas distintas tal que $\Gamma(g) = \Gamma(f)$.

4. Sea $f \in k[X_1]$ de grado ≥ 2, y $\overline{C}$ el completado en $\mathbb{P}^2$ de la curva afín $C = V(f) \subset \mathbb{A}^2$. Describir una parametrización de la curva dual de $\overline{C}$.