Hoja de problemas 1

13/09/2023

Curvas algebraicas

1. (a) Calcular los homogeneizados de los siguentes polinomios:

$$f(X,Y) = 1 + XY - X^3 + Y^4, \qquad g(X_1, X_2) = Y^4 - X^3 - \epsilon.$$

   (b) Calcular los deshomogeneizados de los siguentes polinomios:

$$F(X_0, X_1, X_2) = X_0^3 + X_1^3 + X_2^3, \qquad G(X,Y,Z) = X^3 - ZY^2 + Z^2X + Z^3.$$

2. Sean $F, G \in k[X_0, X_1, X_2]$ y $f, g \in k[X_1, X_2]$.

   (a) Si F y G son los homogeneizados de f y g, y $F = G$, entonces $f = g$.

   (b) Suponemos que f y g son los deshomogeneizados de F y G, y que $f = g$. Entonces $F = G$ si y solo si $\deg(F) = \deg(G)$.

   (c) F es el homogeneizado de f si y solo si $\deg(F) = \deg(f)$.

3. Demonstrar:

   (a) Sean $f, g \in k[X_1, \ldots, X_n]$ polinomios, y $F, G \in k[X_0, \ldots, X_n]$ sus homogeneizados. Si $F = G$, entonces $f = g$.

   (b) Sea $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ polinomio homogéneo, y $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ su deshomogeneizados. Entonces, F es el homogeneizado de f si y solo si $\deg(F) = \deg(f)$.

4. Sea $f(X_1, X_2) = X_1^2 + 1$, y definimos la curva afín $C = V(f)$, y $\overline{C}$ su completado en $\mathbb{P}^2$.

   (a) ¿Cuáles son los puntos en el infinito de $\overline{C}$, es decir, los puntos

$$[a_0 : a_1 : a_2] \in \overline{C}, \quad a_0 = 0?$$

   (b) Describir C en el caso $k = \mathbb{R}$.