

### Hoja de problemas 3

26/09/2023

Curvas algebraicas

1. Cuáles son los componentes de los siguientes curvas afines:

$$C = V(X^2 + XY + X^3 + X^2Y + XY^2 + Y^3),$$

$$D = V(X + Y + X^2Z + 2XYZ + Y^2Z + Z^2).$$

2. Sean  $F, G, H \in k[X, Y, Z]$ , y suponemos que  $F = G \cdot H$ . Demostrar que, si  $F$  es homogéneo, entonces  $G, H$  son homogéneos.
3. Sea  $F \in k[X, Y, Z]$  un polinomio homogéneo de grado 2,

$$F(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eYZ + fXZ,$$

y  $C = V(F)$ . Demostrar que  $F$  no es la ecuación minimal de  $C$  si y solo si

$$4ab = d^2, \quad 4bc = e^2 \quad \text{y} \quad 4ac = f^2.$$

4. (a) Demostrar: si  $\Lambda \subset \mathbb{P}(V_d)$  es un haz, entonces existen polinomios  $F, G$  de grado  $d$  tal que  $\Lambda$  es el conjunto de curvas de la forma

$$V(\lambda F + \mu G),$$

donde  $\lambda, \mu$  no son ambos cero.

- (b) Describir un haz  $\Lambda \subset \mathbb{P}(V_2)$  tal que  $\deg(C)$  no es constante por  $C \in \Lambda$ .