## Hoja de problemas 4

03/10/2023

Curvas algebraicas

1. Sean $p, q \in k[T]$ polinomios en un variable, no ambos constante. Entonces, el conjunto
$$C = \left\{ (p(t), q(t)) \in \mathbb{A}^2 \,\middle|\, t \in k \right\}$$
es una curva, es decir, existe $f \in k[X, Y]$ tal que $C = V(f)$. Demonstrar que $C$ es irreducible.

2. Suponemos que $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Sean
$$\begin{aligned} a_1 &= [0:0:1], & a_4 &= [1:0:1], & a_7 &= [2:0:1], \\ a_2 &= [0:1:1], & a_5 &= [1:1:1], & a_8 &= [2:1:1], \\ a_3 &= [0:2:1], & a_6 &= [1:2:1], & a_9 &= [2:2:1]. \end{aligned}$$
   (a) ¿Cuál es la dimensión del sistema lineal de curvas que pasan por los ocho puntos $a_1, \ldots, a_8$?
   (b) Dar dos cúbicas que pasan por todos los puntos $a_1, \ldots, a_9$.
   (c) Demonstrar que si una cúbica pasa por ocho de los nueve puntos, entonces también pasa por el noveno.

3. Suponemos que $\mathrm{char}(k) = 0$, y sea $\xi \in k$ una raíz cuadrada de 3, es decir, $\xi^2 = 3$. Dar una cónica en $\mathbb{A}^2$ que pasa por los puntos
$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 0), & a_2 &= \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\xi}{2}\right), & a_3 &= \left(\tfrac{-1}{2}, \tfrac{\xi}{2}\right), \\ a_4 &= (-1, 0), & a_5 &= \left(\tfrac{-1}{2}, \tfrac{-\xi}{2}\right), & a_6 &= \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{-\xi}{2}\right), \end{aligned}$$
y demonstrar que es única y irreducible. (dibujar estos puntos en el caso real con $\xi = \sqrt{3}$)

4. Sea $C = V(XY - 1) \subset \mathbb{A}^2$. Demonstrar que no hay polinomios $p, q$ tal que
$$C = \left\{ (p(t), q(t)) \in \mathbb{A}^2 \,\middle|\, t \in k \right\}.$$