Hoja de problemas 6

18/10/2023

Curvas algebraicas

1. Calcular la multiplicidad de intersección $\mathrm{mult}_p(L, C)$ en los siguentes casos:

   (a) $p = (0,0) \in \mathbb{A}^2$, y L y C son los curvas afines
   $$L = V(X+Y), \qquad C = V((X+Y)^2 + (X-Y)^3 + X^4).$$

   (b) $p = (1:1:1) \in \mathbb{P}^2$, y L y C son los curvas proyectivas
   $$L = V(X-Y), \qquad C = V(X^3 + Y^3 - 2Z^3).$$

2. Sea $L = V(X) \subset \mathbb{A}^2$ y $C = V(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{A}^2$.

   (a) Calcular la multiplicidad de intersección de L y C en todos puntos de intersección $L \cap C$.

   (b) Los completados proyectivos $\overline{L}, \overline{C} \subset \mathbb{P}^2$ de L y C intersectan en un punto p en la recta en el infinito. Calcular $\mathrm{mult}_p(\overline{L}, \overline{C})$.

3. Sea $C = V(F) \subset \mathbb{P}^2$ una curva, y suponemos que F es una ecuación minimal de C. Sea L una recta en $\mathbb{P}^2$ parametrizada de $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, donde $A_0, A_1, A_2 \in k[X_0, X_1, X_2]$ son homogéneos de grado 1, y
   $$\varphi(t_0 : t_1) = (A_0(t_0, t_1) : A_1(t_0, t_1) : A_2(t_0, t_1))$$
   Si $p \in L \cap C$, demonstrar:

   (a) La definición de $\mathrm{mult}_p(L, C)$ no depende de la ecuación minimal F.

   (b) La definición de $\mathrm{mult}_p(L, C)$ no depende de la parametrización φ.

4. Sea $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva irreducible de grado $d \geq 2$ y $p \in C$. Demonstrar que $\mathrm{mult}_p(C) < d$.