Hoja de problemas 7

24/10/2023

Curvas algebraicas

1. Si $C \subset \mathbb{P}^2$ es una curva de grado d y $L \subset \mathbb{P}^2$ es una recta no contenida en C, entonces
$$\sum_{p \in C \cap L} \mathrm{mult}_p(L, C) = d.$$

2. Suponemos que $F \in k[X_0, X_1, X_2]$ es un polinomios homogéneo. Demostrar:

   (a) Si $F = H \cdot G$, entonces
   $$p \in V(H) \cap V(G) \quad \Rightarrow \quad F_0(p) = F_1(p) = F_2(p) = 0.$$

   (b) Si
   $$|V(F_0) \cap V(F_1) \cap V(F_2)| < \infty$$
   entonces F es la ecuación minimal de $V(F)$.

3. Suponemos que $d \in \mathbb{Z}_{>0}$, y que $\mathrm{char}(k)$ no sea divisible por d, y que $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Describir los puntos singulares de la curva
$$C = V(X^d Y^d + X^d Z^d + Y^d Z^d)$$
y sus conos tangentes.

4. Si C, D son dos curvas sin componentes comúnes, y $p \in \mathbb{P}^2$, entonces
$$\mathrm{mult}_p(C \cup D) = \mathrm{mult}_p(C) + \mathrm{mult}_p(D).$$
Aquí definimos $\mathrm{mult}_p(C) = 0$ si $p \notin C$.