

Hoja de problemas 8

31/10/2023

Curvas algebraicas

1. Dar parametrizaciones de las siguientes rectas:

$$L_1 = V(X) \subset \mathbb{A}^2$$

$$L_2 = V(X + Y + Z) \subset \mathbb{P}^2$$

$$L_3 = V(3X + 4Y + 100) \subset \mathbb{A}^2$$

$$L_4 = V(3X + 4Y + 100Z) \subset \mathbb{P}^2$$

$$L_5 = V(Z - Y + X) \subset \mathbb{P}^2$$

2. Determinar singularidades, asíntotas y ramas parabólicas de las curvas afines

$$C = V(X^3Y - XY^3 - 1), \quad D = V((X + Y)^3 - XY).$$

3. Demostrar que la ecuación de Bessel

$$T^2 f''(T) + T f'(T) + (T^2 - 1)f(T) = 0$$

tiene una única solución $f \in k[[T]]$ que cumple

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1.$$

Si $f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$, escribimos aquí

$$f'(T) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k T^{k-1}, \quad f''(T) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1) T^{k-2}.$$

4. Calcular la multiplicidad de los siguientes puntos de curvas afines:

$$(0, 0) \in V(X^p + Y^q), \quad p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 2},$$

$$(1, 1) \in V(X^3 - 3X^2 + 3X + Y^3 - 3Y^2 + 3Y - 2),$$

$$(0, 0) \in V(X^2Y^2).$$