Hoja de problemas 10

15/11/2023

Curvas algebraicas

1. Sea $f(X,Y) = Y^2 - X^2 - X^3 \in k[X,Y]$, y $C = V(f) \subset \mathbb{A}^2$. Demostrar que la curva C tiene dos parametrizaciones formales en $(0,0)$ de la forma

$$(X, p_+(X)), \qquad (X, p_-(X))$$

donde $p_+(X), p_-(X) \in k[[X]]$ tienen orden 1, y

$$p_+(X) = X + \cdots, \qquad p_-(X) = -X + \cdots.$$

2. Suponemos que $C \subset \mathbb{A}^2$ es una curva, cuya ecuación minimal es $f(X,Y) \in k[X,Y]$, y que $(0,0) \in C$. Sea (p,q) una parametrización formal en $(0,0) \in C$, y $s = \min\{O(p), O(q)\}$. Entonces, podemos escribir

$$p(T) = \sum_{i=s}^{\infty} a_i T^i, \qquad q(T) = \sum_{i=s}^{\infty} b_i T^i, \qquad (a_s, b_s) \neq (0,0).$$

Demostrar que la recta $V(a_s X + b_s Y)$ es tangente a C en $(0,0)$.

3. Sea $C = V(Y^2 - X^3 + X^4)$, y $p(T) \in k[[T]]$ una raíz cuadrada de $1 - T^2$, es decir $p(T)^2 = 1 - T$.

   (a) Demostrar que $(T^4, T^6 p(T^2))$ es una parametrización formal de C en $(0,0)$. ¿Es reducida?

   (b) Describir dos parametrizaciónes formales reducidas distintas de C en $(0,0)$. ¿Son equivalentes?

4. Sea $C = V(Y^5 - X^7 + X^{10})$. Suponemos que C tiene parametricazión formal en $(0,0)$ de la forma $(T, p(T))$. ¿Cuál es el orden de $p(T)$?