Hoja de problemas 11

21/11/2023

Curvas algebraicas

1. Dibujar los polígonos de Newton, y determinar el primer termino de una raíz de los siguentes elementos de $k\{\{X\}\}[Y]$

$$f(X,Y) = X^5 + X^2Y^2 + Y^5, \qquad g(X,Y) = Y^2 + Y^{100}X^{1/2} + X^{101/33},$$
$$h(X,Y) = (Y^2 + X^3)(Y^3 + X^2), \qquad l(X,Y) = Y^2 - XY + X^2.$$

2. Suponemos que $f(X,Y) \in k[X,Y]$ es la equación minimal de la curva $C = V(f) \subset \mathbb{A}^2$, y que $f(X,Y) = Y^b - X^a + \dots$ con $bi + aj \geq ab$ si $(i,j) \in \mathrm{supp}(f)$.
   (a) Demostrar que la curva C tiene una parametrización formal en $(0,0)$ de la forma $(T, p(T))$, con $p(T) \in k\{\{T\}\}$, y calcular el primer término de $p(T)$.
   (b) Demostrar que C tiene solo una rama en el punto $(0,0)$.

3. Sea $f(X,Y) = (Y^2 - X^3)^2 - 2X^5Y \in k[X,Y]$. La curva C tiene una parametrización formal $(T^4, p(T))$ en el punto $(0,0)$. Calcular los dos primeros términos de $p(T)$, y verificar que la parametrización formal es reducida.

4. Sea $p(T) = \sum a_q t^q \in k\{\{T\}\}$ una raíz cuadrada de $T^3 - T^4$, tal que $a_{3/2} = 1$. Calcular los términos a_q para $q \leq 4$.