Hoja de problemas 12

28/11/2023

Curvas algebraicas

1. Calcular la multiplicidad de intersección entre la rama R y la curva C en $p = (0, 0)$, en los siguentes casos:

   (a) Sea $a \in \mathbb{Z}$ un número entero, $a > 10$, y
   $$R = (X^6, X^{10} + X^a + \ldots), \qquad C = V(Y^6 - 2X^5Y^3 + X^{10} - 9X^9Y).$$

   (b) Suponemos que $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, y que $\gcd(a, b) = 1$. C es la curva $V(X^a + Y^b)$, y R es la única rama de la curva $Y^a - X^b + X^aY^b$.

2. Sea
   $$f(X, Y) = Y^4 - 2X^5Y^2 + X^{10} + X^{13}Y \in k[X, Y].$$
   Describir una rama de C en $(0, 0)$ de la forma $(X^r, p(X))$ con $p(X) \in k[[X]]$, es decir, los dos primeros términos de $p(X)$.

3. Sean $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Demostrar que la curva $C = V(X^a - Y^b + X^aY^b)$ tiene $\gcd(a, b)$ ramas en $(0, 0)$.

4. Sea $C \subset \mathbb{A}^2$ una curva, y suponemos que el punto $(a, b) \in C$ tiene r ramas $R_1 = (p_1(T), q_1(T)), \ldots, R_r = (p_r(T), q_r(T))$. Si $f \in k[X, Y]$, definimos $\nu_i(f) = O(f(p_i(T), q_i(T)))$ y
   $$S_{C,0} = \{(\nu_1(f), \ldots, \nu_r(f)) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{+\infty\})^r \mid f \in k[X, Y]\}.$$
   Aquí, usamos la definición $O(0) = +\infty$. Demostrar:

   (a) Si $a, b \in S_{C,0}$, entonces $a + b \in S_{C,0}$.

   (b) Si $a = (a_1, \ldots, a_r) \in S_{C,0}$ y $b = (b_1, \ldots, b_r) \in S_{C,0}$, entonces $(c_1, \ldots, c_r) \in S_{C,0}$, donde
   $$c_i = \min\{a_i, b_i\}, \qquad i = 1, \ldots, r.$$