Hoja de problemas 12

28/11/2023

Curvas algebraicas

1. Sea k un cuerpo algebramente cerrado y $f, g \in k[X]$ polinomios, mónicos de grado $d, e > 0$ tal que

$$f(X) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{d-1}X^{d-1} + a_d X^d, \quad g(X) = b_0 + b_1 + \ldots + b_{d-1}X^{e-1} + b_e X^e,$$

con $a_d = b_e = 1$, y

$$f(X) = \prod_{i=1} X - \alpha_i, \qquad g(X) = \prod_{i=1} X - \beta_i.$$

Demostrar que

$$\operatorname{res}(f, g) = \pm \prod_{i,j} \beta_j - \alpha_i$$

usando los siguentes pasos:

(a) Definimos la matrice

$$M(f,g) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_d & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots & a_{d-1} & a_d & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & a_0 & a_1 & \ldots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_e & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & \ldots & b_{e-1} & b_e & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & b_0 & b_1 & \ldots & b_{e-1} & b_e \end{pmatrix}$$

de tamaño $(d+e) \times (d+e)$ tal que $\operatorname{res}(f,g) = \det(M(f,g))$.

(b) Si $d = 1$, entonces $f(X) = X - \alpha_1$, y $\operatorname{res}(f,g) = b_0 + b_1\alpha_1 + \ldots + \alpha^e$.

(c) Si $d > 1$, entonces $\bar{f}(X) = f(X)/(X - \alpha)$ es un polinomio mónico de grado $d - 1$,

$$f(X) = \prod_{i=1}^{d-1} X - \alpha_i = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 X + \ldots \bar{a}_{d-2}X^{d-2} + X^{d-2}.$$

Realizar operaciones de columnas en la mátriz $M(f,g)$ que producen una matriz

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \bar{a}_0 & \cdots & \bar{a}_{d-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \bar{a}_{d-2} & \bar{a}_{d-1} & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_0 & \cdots & \bar{a}_{d-2} & \bar{a}_{d-1} \\ c_{0,0} & c_{0,1} & & & & & c_{0,d+e-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & & & & & c_{1,d+e-1} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ c_{d-1,0} & c_{d-1,1} & & & & & c_{d-1,d+e-1} \end{pmatrix}$$

con $c_{1,1} = b_0 + b_1\alpha_d + \ldots + b_e\alpha_d^e$, y operaciones de filas que producen

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \bar{a}_0 & \cdots & \bar{a}_{d-2} & \bar{a}_{d-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_0 & \cdots & \bar{a}_{d-2} & \bar{a}_{d-1} \\ c_{0,0} & c_{0,1} & & & & & c_{0,d+e-1} \\ 0 & b_0 & \ldots & b_{e-1} & b_e & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & b_0 & \ldots & b_{e-1} & b_e \end{pmatrix}$$

Concluir que

$$\operatorname{res}(f,g) = \det(M(f,g)) = \det(N) = \det(P) = \pm c_{1,1}\operatorname{res}(\bar{f},g).$$

2. Sea $C \subset \mathbb{A}^2$ una curva que tiene equación minimal $f \in k[X,Y]$, una única rama en $(0,0)$, y una parametrización de la forma $(T^b, T^a + \ldots)$. Demostrar que el polígono de Newton de f es el polígono de Newton de $g(X,Y) = Y^b - X^a$.

3. Demostrar que una cúbica lisa tiene exactamente nueve puntos de inflexión.

4. Sean $C, D \subset \mathbb{P}^2$ las curvas proyectivas

$$C = V(X^2 + Y^2 - 2Z^2), \qquad D = V(X^3 + Y^3 + 4Z^3).$$

Cuáles son los puntos de $C \cap D$, y cuáles son sus multiplicidades de intersección?